- مفردات المقرر
- المقاسات
- المقاس الجزئي
- جمع ومقاييس مسلسلات الرياضيات (المرجع الأول)
- الارتباط والاستقلال الخطي
- التشاكل بين المقاسات
- المقاسات الخارجية
- المقاسات المنتهية
- المقاسات النوترية والارتينية
- المقاسات نصف البسيطة
- المقاسات الاسقاطية - المقاسات الاغمارية

- المقاس

لتكن R حلقة واحدية ولتكن M زمرة آبلية بالنسبة إلى عملية الجمع فإننا نعرف قانون تأثير خارجي على M يحوي مؤثراته عناصر R على النحو التالي:

$$f : R \times M \longrightarrow M$$

$$(\alpha, m) \longrightarrow \alpha(m)$$

بحيث يحقق الشروط التالية:

① $(\alpha + \beta) m = \alpha m + \beta m$

② $\alpha (m_1 + m_2) = \alpha m_1 + \alpha m_2$

③ $(\alpha \beta) m = \alpha (\beta m)$

④ $1 \cdot m = m$

عندئذ نقول أن M مقاس على R

$\forall \alpha, \beta \in R \quad , \forall m_1, m_2 \in M$

أولاً نقول أن M موديولاً على R إذا حقق الشروط الآتية

أولاً $(M,+)$ زمرة آبلية

① $a+b\in M$

② $a+(b+c)=(a+b)+c$

③ $\exists\ 0\in M\ ;\ a+0=0+a=a$

④ $\exists\ -a\in M\ ,\ a+(-a)=(-a)+a=0_m$

⑤ $a+b=b+a$

العنصر المحايد 0_m , $;\ \forall\ a,b\in M$

ثانياً M معرف عليها قانون تأثير خارجي الوحدة مؤثراته عناصر R أي

$\forall\ \alpha\in R\ ,\ m\in M\ ;\ \alpha m\in M$

بحيث يحقق الشروط

① $(\alpha+\beta)m=\alpha m+\beta m$

② $\alpha(m_1+m_2)=\alpha m_1+\alpha m_2$

③ $(\alpha\beta)m=\alpha(\beta m)$

④ $1.m=m$

---

* ملاحظات ومسائل :
* يسمى الموديول M السابق موديولاً يسارياً على R للعناصر R موضوعة على اليسار
* بنفس الطريقة يمكن تعريف الموديول اليمني على R ونرمز للموديول اليساري بـ $_RM$
* في بعض الكتب بعض المؤلفين لا يشترطون أن تكون الحلقة ذات محايد وعندئذ لا نحتاج لوجود الشرط (4) وعندما يكون R ذات محايد يسمى الموديول بالموديول الأحادي.

بالنسبة لنا سنعتبر أن المودول المدروس مودول يساري ما لم يذكر خلاف ذلك.

• إذا أعطي علاقتان على تركيب المودول M يساريا كان أو يمينا على R بآن واحد أي:

$(s\,m).r = s(m.r) \quad ; \forall s \in S,\ r \in R,\ m \in M$

• إذا كانت R حقل فضاء متجه أي أن الفضاء المتجه هو حالة خاصة من المودول أي أن الفضاء المتجه هو مودول فقط والعكس غير صحيح

• من كون M زمرة آبلية بالنسبة للجمع ينتج أن الجمع في M تبديلي وتجميعي ويوجد في M عنصر حيادي يرمز له صفر المودول ويرمز له 0_M فقط لتمييزه عن صفر الحلقة (الحيادي الجمعي في R)

ملاحظة: من خلال البحث يتم التمييز بين صفر الحلقة وصفر المودول والتأكيد أن صفر المودول وحيد لأن الحيادي في الزمرة وحيد.

كذلك لكل عنصر في M مثل m يوجد نظير جمعي $(-m)$

$m + (-m) = (-m) + m = 0_M$

وهو وحيد أيضا لأن النظير لكل عنصر في زمرة وحيد علاقة بين عناصر المودول M ومتجهات وعناصر الحلقة R — [illegible]

+ خواص المودول الأساسية

لكل $r \in R$ و $m \in M$ فإن:

1) $0_R . m = 0_M$
2) $r . 0_M = 0_M$
3) $(-r).m = r(-m) = -(rm)$
4) $r\left(\sum_{i=1}^{n} m_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r\,m_i$
5) $\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right) m = \sum_{i=1}^{n} r_i\,m$

البرهان:

(1)

$0_R = 0_R + 0_R$

$0_R . m = (0_R + 0_R) . m = 0_R . m + 0_R . m$

$0_m + 0_R . m = 0_R . m + 0_R . m$

$0_m = 0_R . m$

نضيف مشابهة نظير (2)

---

(3)

$r + (-r) = 0_R$

$(r + (-r)) . m = 0_R . m = 0_m$

$rm + (-r) m = 0_m$

نضيف من الزمرة الأبلية M معكوسها مع معكوس

$(-r) . m = -(rm)$ (4)

طريقة ثالثة.

$(m + (-m)) = 0_m$

$r (m + (-m)) = r . 0_m = 0_m$

$rm + r(-m) = 0_m$

نضيف في الزمرة الأبلية M معكوس الجمعي لها بالتالي فإن عنصران متساويان بالنسبة لهذا القانون

$r(-m) = -(r m)$

ملاحظة و نستنتج أن:

$(-r) m = r(-m) = -(rm)$

تمارين:

(1) كل حلقة واحدية يمكن اعتبارها أنها موديول على ذاتها.

---

② إذا كانت R علاقة دائرية [illegible]
[illegible] and $\{ (a, a) \in R \}$ [illegible] R
اثبت أن [illegible] R [illegible]
[illegible] R

③ إذا كانت R علاقة دائرية [illegible] $M(a, R)$ [illegible]
[illegible] R [illegible]
R [illegible]

④ اختبر صحة القضية التالية
إذا كانت M مجموعة علاقة R وكان [illegible] $r \in R$, $m \in M$
فإن
[illegible]

[illegible]